A parciális (rész)törtekre bontás bemutató feladatai

Alapvetések:

1-Ha a felbontandó tört nevezőjében lévő polinomnak léteznek valós gyökei, akkor olyan résztörteket feltételezünk, amelyeknek számlálói változótól független konstansértékek.

Megjegyzés: természetesen előfordulhat, hogy a nevezőben lévő polinomnak nincsenek valós gyökei, de ezt ebben a tanévben nem erőltetem, majd jövőre megmutatom olyankor mi lesz a felbontás menete.

2-Az algebra alaptétele: Minden, komplex szám együtthatókkal rendelkező „n”-edfokú polinomnak, legfeljebb „n” db komplex gyöke/zérushelye/megoldása van.

Ha most a valós gyökökkel rendelkező polinomokra szorítkozunk, akkor ezt az alaptételt átfogalmazzuk:

Minden valós szám együtthatókkal rendelkező „n”-edfokú polinomnak, legfeljebb „n” db valós gyöke/zérushelye/megoldása van. Ekkor az

(ahol együtthatók, közülük a főegyüttható) csökkenő hatvány szerint 0-ra rendezett „n”-edfokú polinom átírható az ú.n.: gyöktényezős alakra,

ez ekkor a főegyüttható.

Megjegyzés: ennek a gyöktényezős alaknak speciális esete a másodfokú egyenleteknél megismert

szorzatalak.

3-Ha a megadott algebrai tört számlálójában nagyobb fokszámú polinom van, mint a nevezőben, akkor polinomosztással kezdünk és utána alkalmazzuk a résztörtekre bontást.

Feladat: Bontsa parciális törtek összegzésére a megadott algebrai törteket!

1.) a nevezőben 2db különböző valós gyökkel rendelkező másodfokú polinom

A.h.: ennek gyökei . A gyöktényezős alak értelmében:

Mivel a nevezőnek vannak valós gyökei, ezért az eredeti törtet olyan résztörtekre bonthatjuk, amelyek nevezői a szorzatalak 1-1 tényezője, a számlálója pedig változótól független konstans:

A feltételezett résztörteknél közös nevezőre hozunk:

A számlálóban zárójelet bontunk, majd csökkenő hatvány szerint rendezve átcsoportosítjuk a tagokat:

Az eredetileg megadott tört és az általunk feltételezett résztörtek akkor és csak akkor lehetnek egyenlők, ha a számlálóban lévő polinomok együtthatói közvetlenül egyenlők (ezt hívjuk az együtthatók egyeztetése módszernek), tehát a megoldandó kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer:

Ennek megoldása: tehát:

Ellenőrzés:

2.) a nevezőben 3db különböző valós gyökkel rendelkező harmadfokú polinom (triviális eset)

A.h.: . Mivel mindegyik tag tartalmazza az „x” változót legalább első hatványon, ezért közvetlen kiemeléssel szorzattá alakítunk: és a zárójelen belül visszamaradó másodfokú polinomnak meghatározzuk gyökeit: .

Tehát a nevező gyöktényezős alakja:

amely tényezőnként nem lehet nulla értékű, így

Mivel a nevezőnek vannak valós gyökei, ezért az eredeti törtet olyan résztörtekre bonthatjuk, amelyek nevezői a szorzatalak 1-1 tényezője, a számlálója pedig változótól független konstans:

A feltételezett résztörteknél közös nevezőre hozunk:

A számlálóban zárójelet bontunk, majd csökkenő hatvány szerint rendezve átcsoportosítjuk a tagokat:

Az eredetileg megadott tört és az általunk feltételezett résztörtek akkor és csak akkor lehetnek egyenlők, ha a számlálóban lévő polinomok együtthatói közvetlenül egyenlők (ezt hívjuk az együtthatók egyeztetése módszernek), tehát a megoldandó háromismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer:

Ennek megoldása: tehát:

Ellenőrzés:

Megjegyzés: a feladat megoldása kezdhető előjelváltással, ettől a megoldás ugyanaz lesz:

3.) a nevezőben 3db különböző valós gyökkel rendelkező harmadfokú polinom (magától értetődő eset)

A.h.: .

Számlálók: , nevezők: .

Lehetséges racionális megoldások:

Ezek közül tényleges gyökök amelyek az A.h. miatt nem nulla értékűek, tehát:

Mivel a nevezőnek vannak valós gyökei, ezért az eredeti törtet olyan résztörtekre bonthatjuk, amelyek nevezői a szorzatalak 1-1 tényezője, a számlálója pedig változótól független konstans:

A feltételezett résztörteknél közös nevezőre hozunk:

A számlálóban zárójelet bontunk, majd csökkenő hatvány szerint rendezve átcsoportosítjuk a tagokat:

Az eredetileg megadott tört és az általunk feltételezett résztörtek akkor és csak akkor lehetnek egyenlők, ha a számlálóban lévő polinomok együtthatói közvetlenül egyenlők (ezt hívjuk az együtthatók egyeztetése módszernek), tehát a megoldandó háromismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer:

Ennek megoldása: tehát:

Ellenőrzés:

4.) a nevezőben 4db különböző valós gyökkel rendelkező negyedfokú polinom

A.h.: amelynek gyökei amelyből

tehát

Mivel a nevezőnek vannak valós gyökei, ezért az eredeti törtet olyan résztörtekre bonthatjuk, amelyek nevezői a szorzatalak 1-1 tényezője, a számlálója pedig változótól független konstans:

A feltételezett résztörteknél közös nevezőre hozunk:

A számlálóban zárójelet bontunk, majd csökkenő hatvány szerint rendezve átcsoportosítjuk a tagokat:

Az eredetileg megadott tört és az általunk feltételezett résztörtek akkor és csak akkor lehetnek egyenlők, ha a számlálóban lévő polinomok együtthatói közvetlenül egyenlők (ezt hívjuk az együtthatók egyeztetése módszernek), tehát a megoldandó négyismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer:

Ennek megoldása: tehát:

Ellenőrzés:

5.) a nevezőben 2db megegyező valós gyökkel rendelkező másodfokú polinom

A.h.: gyökei tehát

Mivel a nevezőnek vannak valós gyökei, ezért az eredeti törtet olyan résztörtekre bonthatjuk, amelyek nevezői a szorzatalak 1-1 tényezője, a számlálója pedig változótól független konstans:

A feltételezett résztörteknél közös nevezőre hozunk:

A számlálóban zárójelet bontunk, majd csökkenő hatvány szerint rendezve átcsoportosítjuk a tagokat:

Az eredetileg megadott tört és az általunk feltételezett résztörtek akkor és csak akkor lehetnek egyenlők, ha a számlálóban lévő polinomok együtthatói közvetlenül egyenlők (ezt hívjuk az együtthatók egyeztetése módszernek), tehát a megoldandó kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer:

Ennek megoldása: tehát:

Ellenőrzés:

6.) a nevezőben 2db megegyező és 1 tőlük különböző valós gyökkel rendelkező harmadfokú polinom

A.h.: amelyből

Mivel a nevezőnek vannak valós gyökei, ezért az eredeti törtet olyan résztörtekre bonthatjuk, amelyek nevezői a szorzatalak 1-1 tényezője, a számlálója pedig változótól független konstans:

A feltételezett résztörteknél közös nevezőre hozunk:

A számlálóban zárójelet bontunk, majd csökkenő hatvány szerint rendezve átcsoportosítjuk a tagokat:

Az eredetileg megadott tört és az általunk feltételezett résztörtek akkor és csak akkor lehetnek egyenlők, ha a számlálóban lévő polinomok együtthatói közvetlenül egyenlők (ezt hívjuk az együtthatók egyeztetése módszernek), tehát a megoldandó háromismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer:

Ennek megoldása: tehát:

Ellenőrzés:

7.) a nevezőben 3db megegyező valós gyökkel rendelkező harmadfokú polinom

A.h.: amelyből

Mivel a nevezőnek vannak valós gyökei, ezért az eredeti törtet olyan résztörtekre bonthatjuk, amelyek nevezői a szorzatalak 1-1 tényezője, a számlálója pedig változótól független konstans:

A feltételezett résztörteknél közös nevezőre hozunk:

A számlálóban zárójelet bontunk, majd csökkenő hatvány szerint rendezve átcsoportosítjuk a tagokat:

Az eredetileg megadott tört és az általunk feltételezett résztörtek akkor és csak akkor lehetnek egyenlők, ha a számlálóban lévő polinomok együtthatói közvetlenül egyenlők (ezt hívjuk az együtthatók egyeztetése módszernek), tehát a megoldandó háromismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer:

Ennek megoldása: tehát:

Ellenőrzés:

8.) a nevezőben 3db megegyező és 1 tőlük különböző valós gyökkel rendelkező negyedfokú polinom

A.h.: amelyből

Mivel a nevezőnek vannak valós gyökei, ezért az eredeti törtet olyan résztörtekre bonthatjuk, amelyek nevezői a szorzatalak 1-1 tényezője, a számlálója pedig változótól független konstans:

A feltételezett résztörteknél közös nevezőre hozunk:

A számlálóban zárójelet bontunk, majd csökkenő hatvány szerint rendezve átcsoportosítjuk a tagokat:

Az eredetileg megadott tört és az általunk feltételezett résztörtek akkor és csak akkor lehetnek egyenlők, ha a számlálóban lévő polinomok együtthatói közvetlenül egyenlők (ezt hívjuk az együtthatók egyeztetése módszernek), tehát a megoldandó négyismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer:

Ennek megoldása: tehát:

Ellenőrzés:

9.) a nevezőben 2-2db megegyező valós gyökkel rendelkező negyedfokú polinom

A.h.: ebből tehát

Mivel a nevezőnek vannak valós gyökei, ezért az eredeti törtet olyan résztörtekre bonthatjuk, amelyek nevezői a szorzatalak 1-1 tényezője, a számlálója pedig változótól független konstans:

A feltételezett résztörteknél közös nevezőre hozunk:

A számlálóban zárójelet bontunk, majd csökkenő hatvány szerint rendezve átcsoportosítjuk a tagokat:

Az eredetileg megadott tört és az általunk feltételezett résztörtek akkor és csak akkor lehetnek egyenlők, ha a számlálóban lévő polinomok együtthatói közvetlenül egyenlők (ezt hívjuk az együtthatók egyeztetése módszernek), tehát a megoldandó négyismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer:

Ennek megoldása: tehát:

Ellenőrzés:

10.) a nevezőben 4db megegyező valós gyökkel rendelkező negyedfokú polinom

A.h.: amelyből

Mivel a nevezőnek vannak valós gyökei, ezért az eredeti törtet olyan résztörtekre bonthatjuk, amelyek nevezői a szorzatalak 1-1 tényezője, a számlálója pedig változótól független konstans:

A feltételezett résztörteknél közös nevezőre hozunk:

A számlálóban zárójelet bontunk, majd csökkenő hatvány szerint rendezve átcsoportosítjuk a tagokat:

Az eredetileg megadott tört és az általunk feltételezett résztörtek akkor és csak akkor lehetnek egyenlők, ha a számlálóban lévő polinomok együtthatói közvetlenül egyenlők (ezt hívjuk az együtthatók egyeztetése módszernek), tehát a megoldandó négyismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer:

Ennek megoldása: tehát:

Ellenőrzés:

11.) ráadás: a nevezőben többszörös gyökkel rendelkező magasabb fokszámú polinom

A.h.:

Számlálók: , nevezők: .

Lehetséges racionális megoldások:

Ezek alapján is kizárható, teszteljük Horner elrendezéssel, hogy gyökök közül melyik ismétlődik.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 8 | -28 | 6 | 23 | -16 | 3 |
| --- | -8 | 36 | -42 | 19 | -3 |
| 8 | -36 | 42 | -19 | 3 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 8 | -36 | 42 | -19 | 3 |
| --- | -8 | 44 | -86 | 105 |
| 8 | -44 | 86 | -105 | 108 |

Tehát csak egyszeres gyök, teszteljük most értéket:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 8 | -28 | 6 | 23 | -16 | 3 |
| --- | 24 | -12 | -18 | 15 | -3 |
| 8 | -4 | -6 | 5 | -1 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 8 | -4 | -6 | 5 | -1 |
| --- | 24 | 60 | 162 | 501 |
| 8 | 20 | 54 | 167 | 500 |

Tehát is csak egyszeres gyök, teszteljük most értéket:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 8 | -28 | 6 | 23 | -16 | 3 |
| --- | 4 | -12 | -3 | 10 | -3 |
| 8 | -24 | -6 | 20 | -6 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 8 | -24 | -6 | 20 | -6 |
| --- | 4 | -10 | -8 | 6 |
| 8 | -20 | -16 | 12 | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 8 | -20 | -16 | 12 |
| --- | 4 | -8 | -12 |
| 8 | -16 | -24 | 0 |

Mivel mindhárom alkalommal 0 értéket kaptunk a táblázat jobb alsó cellájában, így háromszoros gyök.

Ezek alapján a nevező

Mivel a nevezőnek vannak valós gyökei, ezért az eredeti törtet olyan résztörtekre bonthatjuk, amelyek nevezői a szorzatalak 1-1 tényezője, a számlálója pedig változótól független konstans:

A feltételezett résztörteknél közös nevezőre hozunk:

A számlálóban zárójelet bontunk, majd csökkenő hatvány szerint rendezve átcsoportosítjuk a tagokat:

Az eredetileg megadott tört és az általunk feltételezett résztörtek akkor és csak akkor lehetnek egyenlők, ha a számlálóban lévő polinomok együtthatói közvetlenül egyenlők (ezt hívjuk az együtthatók egyeztetése módszernek), tehát a megoldandó ötismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer:

Ennek megoldása: tehát:

Ellenőrzés: